

图7 内燃发动机的气缸



图8 三峡水库的大坝

大坝,是一座混凝土重力坝。坝体内还有安装了水轮机和发电机的厂房,是一个典型的块体结构。

在半个世纪以前,对于一般的块体结构几乎还没有有效的应力分析手段。已有的手段无非是在设计时做一个模型,在近似受力的情况下,通过测量模

型的变形来得到可参考的结果。在结构运行时,布置一些测点,来观测它的变形。这样的手段既费时又费力,效果还不理想。完全不能适应日益复杂的结构系统的分析要求。

山穷水复疑无路,柳暗花明又一村。在计算机普及之后,大约从20世纪60年代开始,人们发展了一种“有限单元法”去分析任何结构包括梁板壳的应力与变形。基本思想是把结构假想地剖分为很多单元体,对每个单元设置若干未知量,采取近似的表达式表述其变形,然后根据外力、单元的材料性质、单元之间的连接和平衡条件得到一组规模很大的方程组,未知量个数可以达到数万乃至数百万,用计算机求解这些方程组,便可以得到这个块体结构的变形与应力分布。按照这种思想编制的通用和专用软件很快地形成了一个有相当规模的产业。在设计之前用这种软件对各种设计方案进行计算,已经成为设计的最重要的环节。有限单元法的产生与发展可以说是在计算机时代的结构力学,在它的指引下,结构设计变得愈来愈合理、结构的功能愈来愈强大、结构设计的工作量愈来愈减小,空前加速和改善了结构工程的发展。

doi: 10.6052/1000-0879-17-059

(责任编辑:胡漫)



大学生园地

## 平面运动刚体两类瞬心轨迹之间关系的探讨

黄云帆<sup>1)</sup>

(清华大学航天航空学院,北京 100084)

**摘要** 首先阐述了刚体运动的列阵-矩阵描述方法,然后在阐明刚体瞬心及两类瞬心轨迹等概念的基础上,经过简洁的数学推演,给出了平面运动刚体的动瞬心轨迹与定瞬心轨迹在固定坐标系中投影的运动方程。通过分析二者的运动方程,证明了结论:平面运动刚体任一时刻的动瞬心轨迹在定瞬心

轨迹上作纯滚动,接触点即为刚体在该时刻的瞬心固连点。然后通过一个具体算例展示了瞬心轨迹运动方程的求解方法,并讨论了运动方程的物理意义。最后对一般运动刚体的情形进行了简要讨论。

**关键词** 刚体,平面运动,瞬心轨迹,纯滚动,坐标方法

2017-03-14 收到第1稿,2017-04-01 收到修改稿。

1) E-mail: huangyf15@mails.tsinghua.edu.cn

**引用格式:** 黄云帆. 平面运动刚体两类瞬心轨迹之间关系的探讨. 力学与实践, 2017, 39(3): 306-311

Huang Yunfan. On the relationship between the two loci of instant center of rigid body in plane motion. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(3): 306-311

中图分类号：O311.2 文献标识码：A

doi: 10.6052/1000-0879-17-083

与刚体固连而瞬时速度为零的点称为刚体在该时刻的瞬时速度中心，简称瞬心。如果某瞬时刚体的瞬心存在，则该时刻所有瞬心将构成三维欧氏空间中的一条直线，这条直线称为刚体在该时刻的瞬时转轴。

对于平面运动刚体的情况，由于平行于该刚体运动平面的任一截面上的刚体固连点即可代表该刚体的运动，且此时瞬时转轴一定存在，这时“瞬心”一词特指瞬时转轴与上述给定截面的交点。给定一个参考系（称为固定参考系），则定义在固定参考系中观察瞬心运动得到的轨迹为定瞬心轨迹，在与刚体相固连的固连参考系中观察其运动得到的轨迹为动瞬心轨迹。

对于平面运动刚体两类瞬心轨迹之间的关系，许多理论力学教材将其作为结论直接给出<sup>[1]</sup>。文献<sup>[2]</sup>采用了自然坐标系，利用矢量分析的方法给出了上述关系的严格证明，笔者采用刚体运动在笛卡尔坐标系下的列阵-矩阵表述，利用简洁的代数方法导出了该关系，供读者参考。

为行文的简洁明确起见，约定函数  $f(t, \tau)$  ( $t, \tau$  相互独立) 的偏导数记号如下

$$\dot{f}(t, \tau) \equiv \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t}$$

$$f'(t, \tau) \equiv \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial \tau}$$

### 1 两类瞬心轨迹的运动方程

#### 1.1 刚体固连点运动的描述

首先阐述刚体固连点运动的列阵-矩阵描述方法。任取一个相对于固定参考系静止的点  $O_0$  作为原点建立固定坐标系  $O_0X_0Y_0Z_0$ ，任取刚体一固连点  $O$  作为基点建立固连坐标系  $Oxyz$  以及相对固定坐标系为平移变换关系的平动坐标系  $OXYZ$ 。现任取一刚体固连点  $P$ ，设  $\mathbf{R}$  为  $P$  相对  $O_0$  的位矢， $\mathbf{R}_O$  为  $O$  相对  $O_0$  的位矢， $\mathbf{r}$  为  $P$  相对  $O$  的位矢（如图 1 所示）。并记  $\mathbf{A}$  为由固定坐标系到固连坐标系的方向余弦矩阵， $\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{R}}_O$  分别为  $\mathbf{R}, \mathbf{R}_O$  在固定坐标系中的列阵， $\underline{\mathbf{r}}$  为  $\mathbf{r}$  在平动坐标系中的列阵， $\underline{\rho}$  为  $\mathbf{r}$  在固连坐标系中的列阵，则  $\underline{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\underline{\rho}$ 。于是在  $t$  时刻有

$$\underline{\mathbf{R}}(t) = \underline{\mathbf{R}}_O(t) + \underline{\mathbf{r}}(t) =$$

$$\underline{\mathbf{R}}_O(t) + \mathbf{A}(t)\underline{\rho}(t)$$

注意到点  $P$  是刚体固连点，因此位矢  $\mathbf{r}$  在固连坐标系  $Oxyz$  中的列阵  $\underline{\rho}$  为常列阵，即  $\dot{\underline{\rho}}(t) \equiv \mathbf{0}$ 。从而有

$$\dot{\underline{\mathbf{R}}}(t) = \dot{\underline{\mathbf{R}}}_O(t) + \dot{\mathbf{A}}(t)\underline{\rho}(t) =$$

$$\dot{\underline{\mathbf{R}}}_O(t) + \boldsymbol{\Omega}(t)\underline{\mathbf{r}}(t) \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}(t) \equiv \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

为刚体角速度张量在固定坐标系中的投影矩阵。式 (1) 给出了刚体上任意一点在固定坐标系中的速度，即该点的绝对速度。

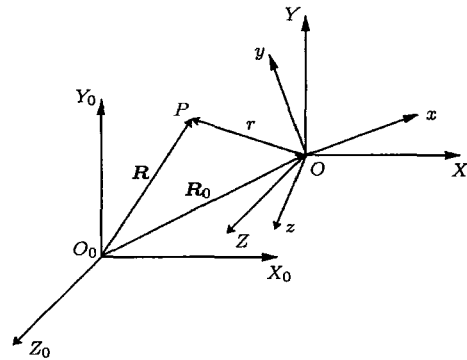


图 1

#### 1.2 瞬心概念辨析与瞬心几何点坐标的推导

通常情况下，在使用“ $t_0$  时刻的瞬心”这种提法时会有两种不同的含义：一是指  $t_0$  时刻瞬时速度为零的刚体固连点，它始终与刚体相固连；二是特指该固连点在  $t_0$  时刻所在的空间位置，它是不与刚体相固连的空间几何点，而只是在  $t_0$  时刻与该时刻的瞬心固连点相重合。为避免混淆，本文在表达前一种语义时将其表述为“某时刻的瞬心固连点”，在表达后一种语义时则将其表述为“某时刻的瞬心几何点”。特别地，在瞬心轨迹的定义里提到的瞬心指的就是瞬心几何点，也就是说瞬心轨迹实际上是针对瞬心几何点而定义的概念。

令点  $P$  刚体在  $t_0$  时刻的瞬心固连点，则它应该满足在  $t_0$  时刻的瞬时速度为零的条件。在式 (1) 中令  $\dot{\underline{\mathbf{R}}}(t) = \mathbf{0}$ ，有

$$\boldsymbol{\Omega}(t)\underline{\mathbf{r}}(t) = -\dot{\underline{\mathbf{R}}}_O(t) \tag{2}$$

对于平面运动刚体的情况,上式退化为给定截面(不妨设为  $O_0X_0Y_0$  平面)上的平面向量式,其中  $\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$ . 当  $\omega(t_0) = \omega_z e_z \neq 0$  时,  $\Omega(t)$  的行列式为

$$|\Omega(t_0)| = \omega_z^2 \neq 0$$

此时式 (2) 存在唯一解

$$\underline{r}(t_0) = -\Omega^{-1}(t_0)\underline{\dot{R}}_O(t_0) \tag{3}$$

注意到  $A^{-1}(t_0) \in SO(2)$ , 故

$$|\dot{A}(t_0)| = \frac{|\Omega(t_0)|}{|A^{-1}(t_0)|} \neq 0$$

由式 (3) 得

$$\underline{R}(t_0) = \underline{R}_O(t_0) - \Omega^{-1}(t_0)\underline{\dot{R}}_O(t_0) \tag{4}$$

$$\underline{\rho}(t_0) = -[\dot{A}(t_0)]^{-1}\underline{\dot{R}}_O(t_0) \tag{5}$$

式 (4) 和式 (5) 分别给出了刚体在  $t_0$  时刻的瞬心  $P$  在  $t_0$  时刻的位矢  $\underline{R}$  在固定坐标系中以及位矢  $\underline{r}$  在固连坐标系中的投影列阵.

为了与前面用于刻画包括瞬心固连点在内的刚体固连点的记号加以区分,本文后面将刚体在  $\tau$  时刻的瞬心几何点记为  $C$ , 并设  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$  为  $C$  相对  $O_0$  的位矢,  $\underline{\tilde{r}}(\tau)$  为  $C$  相对  $O$  的位矢,  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$  为  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$  在固定坐标系中的列阵,  $\underline{\tilde{r}}(\tau)$  为  $\underline{\tilde{r}}(\tau)$  在平动坐标系中的列阵,  $\underline{\tilde{\rho}}(\tau)$  为  $\underline{\tilde{r}}(\tau)$  在固连坐标系中的列阵. 这样,由式 (4) 和式 (5) 可得到

$$\underline{\tilde{R}}(\tau) = \underline{R}_O(\tau) - \Omega^{-1}(\tau)\underline{R}'_O(\tau) \tag{6}$$

$$\underline{\tilde{\rho}}(\tau) = -[A'(\tau)]^{-1}\underline{R}'_O(\tau) \tag{7}$$

式 (6) 和式 (7) 分别给出了任意  $\tau$  时刻的瞬心几何点  $C$  的位矢  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$  在固定坐标系中以及位矢  $\underline{\tilde{r}}(\tau)$  在固连坐标系中的投影列阵, 亦即  $\tau$  时刻的瞬心几何点坐标.

### 1.3 两类瞬心轨迹的概念辨析

按照 1.2 节中的描述, 刚体的瞬心几何点是指某时刻在固定参考系中瞬时速度为零的刚体固连点在该时刻所在的空间位置. 一般情况下, 不同时刻的瞬心几何点并不一定对应于同一个刚体固连点, 因此它们在固连参考系中将形成一条曲线, 称为动瞬心轨迹. 类似地, 不同时刻的瞬心几何点在固定参考系形成的曲线称为定瞬心轨迹. 因此, 瞬心轨迹中蕴含了瞬心运动的全部历程.

从上述定义中, 可以看出动瞬心轨迹与定瞬心轨迹之间的两点差异:

(1) 两条曲线的形成过程不同: 前者是在固定参考系中观察得到的, 而后者则是在固连参考系中观察得到的. 我们指出, “在某参考系中观察某点的运动” 用数学语言描述就是作以该参考系的任一固连点为始点、以被观察点为终点的位矢  $\underline{x}$  并考察其形成的曲线  $\underline{x}(\tau)$ . 例如, 由于点  $O$  相对固连参考系静止, 因此在固连参考系中观察上述点  $P$  的运动, 即为曲线  $\underline{r}(\tau)$ . 同理, 定瞬心轨迹就是位矢  $\underline{\tilde{R}}$  (它的始点  $O_0$  相对固定参考系静止) 随时间变化形成的曲线  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$ , 动瞬心轨迹则是位矢  $\underline{\tilde{r}}$  (它的始点  $O$  相对固连参考系静止) 随时间变化形成的曲线  $\underline{\tilde{r}}(\tau)$ , 这样也就给出了两类瞬心轨迹的数学定义.

(2) 两条曲线的运动状态不同: 由上述对两种瞬心轨迹形成过程的分析中可以认识到, 瞬心轨迹实际上就是在三维欧氏空间中按照给定方式生成的曲线. 这里 “按照给定方式生成” 指的是通过在某参考系中观察瞬心几何点变化轨迹的方式给出曲线, 这显然蕴含了这种曲线在生成它的参考系中是静止的. 具体地说, 定瞬心轨迹相对固定参考系静止, 而动瞬心轨迹则相对固连参考系静止. 特别地, 动瞬心轨迹上的瞬心几何点与瞬心固连点在任意时刻向固连坐标系的投影均重合.

考察式 (6) 和式 (7) 可知, 定瞬心轨迹  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$  是空间中一条确定的曲线, 它由刚体在各个时刻的瞬心几何点构成, 曲线上参数  $\tau = \tau_0$  的点就是刚体上作为  $\tau_0$  时刻瞬心的那个固连点; 整条曲线  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$  在固定参考系中静止, 即它在任意时刻  $t$  向固定坐标系得到的投影曲线是相同的. 因此式 (6) 中  $\underline{\tilde{R}}(\tau)$  的表达式实际上给出了定瞬心轨迹在任意时刻  $t$  向固定坐标系投影的参数方程. 同理, 式 (7) 则给出了动瞬心轨迹在任意时刻  $t$  向固连坐标系投影的参数方程.

### 1.4 瞬心轨迹在固定坐标系中投影的运动方程

需要说明的是, 由于固定坐标系相对固定参考系静止, 因此将曲线在不同时刻向固定坐标系投影得到的投影运动方程, 实际上就代表了该曲线在固定参考系中的运动方程.

两类瞬心轨迹均是空间中以某种形式运动着的曲线, 而曲线在空间中的运动则是一个二维的问题: 时间是一个维度, 需要设置参数 (称为时间参数) 用于指明是哪个时刻的曲线, 在瞬心轨迹这一问题

中具体指在哪个时刻将曲线（即瞬心轨迹上所有点的全体）向给定坐标系投影；曲线本身又是一个一维结构，需要设置参数（称为位形参数）来区分在同一时刻投影得到的曲线上的各点。这实际上就是拓扑学概念——同伦的一个具体例子<sup>[3]</sup>。

可以看到，式 (6) 和式 (7) 中的参数  $\tau$  就是位形参数。以式 (7) 为例进行说明。在任一时刻  $t$  将动瞬心轨迹  $\tilde{r}(\tau)$  向固定坐标系中投影得到其投影曲线，可以通过给出参数  $\tau$  的值来区分曲线上的各点。例如，若给出  $\tau = \tau_0$ ，便可知道该点就是  $\tau_0$  时刻的瞬心固连点。因此，下面我们将着重于设置时间参数  $t$  用来指明在  $t$  时刻将曲线向对应坐标系投影。

对于定瞬心轨迹，如前面 1.3 小节末尾所述，由于定瞬心轨迹  $\tilde{R}(\tau)$  在固定参考系中静止，它在固定坐标系中的投影不随时间变化，因此在任意时刻  $t$  将定瞬心轨迹投影到固定坐标系中，得到的投影参数方程形式与式 (6) 相同，即有

$$\tilde{R}_r(t, \tau) = R_O(\tau) - \Omega^{-1}(\tau) \underline{R}'_O(\tau) \quad (8)$$

其中，下标  $r$  表示定瞬心轨迹的投影曲线。

对于动瞬心轨迹  $\tilde{r}(\tau)$ ，与上面类似，由于它在固连参考系中静止，它在固连坐标系中的投影不随时间变化，因此在任意时刻  $t$  将动瞬心轨迹投影到固连坐标系中，得到的形式均与式 (7) 相同，即有

$$\tilde{\rho}_b(t, \tau) = -[A'(\tau)]^{-1} \underline{R}'_O(\tau) \quad (9)$$

其中，下标  $b$  表示动瞬心轨迹的投影曲线。结合固定坐标系和固连坐标系间在  $t$  时刻的坐标转换关系（注意，这里包含牵连项  $\underline{R}_O(t)$ ）

$$\underline{R}(t) = \underline{R}_O(t) + A(t) \underline{\rho}(t)$$

进而可由式 (9) 得到动瞬心轨迹在  $t$  时刻向固定坐标系投影的参数方程，即有

$$\begin{aligned} \tilde{R}_b(t, \tau) &= \underline{R}_O(t) + A(t) \tilde{\rho}_b(t, \tau) = \\ & \underline{R}_O(t) - A(t) [A'(\tau)]^{-1} \underline{R}'_O(\tau) \end{aligned} \quad (10)$$

在给定参考系下，式 (9) 和式 (10) 给出了两类瞬心轨迹在固定坐标系中投影的运动方程。具体地说， $\tilde{R}_r(t, \tau)$  (或  $\tilde{R}_b(t, \tau)$ ) 是指定 (动) 瞬心轨迹上  $\tau$  时刻的瞬心几何点在  $t$  时刻向固定坐标系投影的坐标值。

下面以式 (10) 为例，通过考察  $\tilde{R}_b(t, \tau)$  的  $\tau$  曲线和  $t$  曲线来具体说明两个参数的物理意义。 $t$  为时

间参数，将  $t = t_0$  固定得到的  $\tau$  曲线是动瞬心轨迹在  $t_0$  时刻向固定坐标系中投影形成的曲线； $\tau$  为位形参数，将  $\tau = \tau_0$  固定得到的  $t$  曲线代表了动瞬心轨迹上  $\tau_0$  时刻的瞬心几何点在固定坐标系中投影的运动。

## 2 两类瞬心轨迹的运动规律

### 2.1 瞬心轨迹的几何特征

由式 (9) 和式 (10)，可以得出如下结论：

- (1) 动瞬心轨迹投影的形状不随时间变化。
- (2) 两类瞬心轨迹在同一时刻  $t_0$  的  $\tau$  曲线相切，切点为位形参数  $\tau = t_0$  对应的点。
- (3) 动瞬心轨迹上位形参数为  $\tau_0$  的  $t$  曲线在  $t = \tau_0$  处沿  $t$  方向的方向导数为 0。

现证明如下：由式 (10) 表明，动瞬心轨迹在任意两个时刻只相差一个刚性运动。由于刚性运动不改变确定投影曲线形状的特征量（弧长、曲率、挠率），这就证明了结论 (1)。

对于结论 (2)，只需证  $\forall t$ ，有

$$\begin{aligned} \tilde{R}_r(t, t) &= \tilde{R}_b(t, t) \\ \underline{R}'_r(t, \tau)|_{\tau=t} &= \underline{R}'_b(t, \tau)|_{\tau=t} \end{aligned}$$

前式显然。对于后式，有

$$\begin{aligned} \underline{R}'_r(t, t)|_{\tau=t} &= \\ \underline{R}'_O(\tau)|_{\tau=t} - \frac{d}{dt} \{ A(\tau) [A'(\tau)]^{-1} \underline{R}'_O(\tau) \} |_{\tau=t} &= \\ -A(t) \frac{d}{dt} \{ [A'(\tau)]^{-1} \underline{R}'_O(\tau) \} |_{\tau=t} &= \\ \underline{R}'_b(t, \tau)|_{\tau=t} \end{aligned}$$

对于结论 (3) 即证  $\forall \tau$ ，有

$$\dot{\tilde{R}}_b(t, \tau)|_{t=\tau} = 0$$

将式 (10) 代入即得证。事实上，由瞬心的定义也可得知该式的合理性。

### 2.2 瞬心轨迹的运动规律

结论 (1) 表明，动瞬心轨迹与定瞬心轨迹均具有刚体的特征，即形状不随时间变化。再结合结论 (2) 和结论 (3) 可以得到：作平面运动的刚体，它在任一时刻的动瞬心轨迹相对于定瞬心轨迹的运动是纯滚动，接触点即为动瞬心轨迹（亦即刚体）在该时刻的瞬心。

事实上，从运动学的角度来看，两个刚体的相对运动是纯滚动，其充要条件是二者在接触点处相切

且在接触点位置的相对速度为零. 结论 (2) 说明, 任一时刻  $t_0$ , 平面运动刚体的动瞬心轨迹与定瞬心轨迹相切, 切点即为该时刻的瞬心固连点; 结论 (3) 则说明, 动瞬心轨迹上位形参数为  $\tau_0$  的点在  $\tau_0$  时刻的速度为零, 取  $\tau_0 = t_0$ , 即得  $t_0$  时刻两类瞬心轨迹在切点处的相对速度为零.

### 3 算例分析

一架长为  $2l$  的梯子斜倚在与地面垂直的墙上, 梯子中点到墙角连线与水平向右的方向成角设为  $\theta$ . 如图 2 建立平面笛卡尔坐标系  $O_0X_0Y_0$  和  $Oxy$ . 为讨论问题的简便起见, 设角  $\theta$  随时间的变化规律为  $\theta = \omega t (\omega > 0)$ .

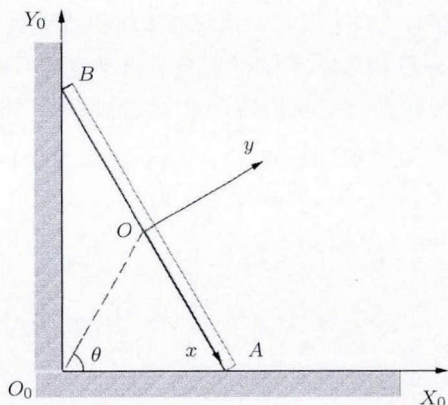


图 2

#### 3.1 建立刚体固连点的运动方程

任取梯子的一个固连点  $P$ , 设它对  $O$  的位矢  $\mathbf{r}$  在固连坐标系中的列阵为  $\underline{\rho}(t) \equiv \underline{\rho}$ . 依次计算得到

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\underline{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^{-1}(t) = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

从而可得固连点  $P$  的运动方程

$$\underline{\mathbf{R}}(t) = \underline{\mathbf{R}}_O(t) + \mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{R}}_O(t) + \mathbf{A}(t)\underline{\rho} \quad (12)$$

其中,  $\underline{\mathbf{R}}_O(t) = l(\cos \omega t, \sin \omega t)^T$ . 另外, 从式 (12) 中也可以得出  $\omega = -\omega \mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$ , 这与梯子作顺时针旋转的事实相符.

#### 3.2 计算 $t_0$ 时刻瞬心几何点的坐标

不妨设固连点  $P$  为刚体在  $t_0$  时刻的瞬心固连

点. 在式中令  $\underline{\dot{\mathbf{R}}}(t) = \mathbf{0}$ , 可解出

$$\underline{\mathbf{R}}(t_0) = 2l(\cos \omega t_0, \sin \omega t_0)^T$$

$$\underline{\rho}(t_0) = 2l(\cos 2\omega t_0, \sin 2\omega t_0)^T$$

由上面两式, 一方面可以获得  $t_0$  时刻的瞬心固连点  $P$  的运动方程

$$\underline{\rho}(t) = 2l(\cos 2\omega t, \sin 2\omega t)^T$$

$$\underline{\mathbf{R}}(t) = \underline{\mathbf{R}}_O(t) + \mathbf{A}(t)\underline{\rho}(t_0) =$$

$$2l \cos \omega(t - t_0)(\cos \omega t_0, \sin \omega t_0)^T \quad (13)$$

另一方面, 也可由式 (6) 和式 (7) 两式得出任意  $\tau$  时刻瞬心几何点的坐标为

$$\underline{\tilde{\mathbf{R}}}(\tau) = 2l(\cos \omega \tau, \sin \omega \tau)^T$$

$$\underline{\tilde{\rho}}(\tau) = 2l(\cos 2\omega \tau, \sin 2\omega \tau)^T$$

#### 3.3 瞬心轨迹运动方程的推导与有关讨论

利用前面已求得的任意  $\tau$  时刻的瞬心几何点坐标, 与式 (8) ~ 式 (10) 类似, 可得

$$\underline{\tilde{\mathbf{R}}}_r(t, \tau) = 2l(\cos \omega \tau, \sin \omega \tau)^T \quad (14)$$

$$\underline{\tilde{\rho}}_r(t, \tau) = 2l(\cos 2\omega \tau, \sin 2\omega \tau)^T$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{R}}}_b(t, \tau) = \underline{\mathbf{R}}_O(t) + \mathbf{A}(t)\underline{\tilde{\rho}}_b(t, \tau) =$$

$$2l \cos \omega(t - \tau)(\cos \omega \tau, \sin \omega \tau)^T \quad (15)$$

式 (14) 和式 (15) 分别给出了梯子的定瞬心轨迹与动瞬心轨迹的运动方程. 下面我们分别具体解释这两式的意义.

(1)  $\underline{\tilde{\mathbf{R}}}_r(t, \tau)$  是以  $2l$  为半径的  $1/4$  圆弧, 圆弧上坐标  $\tau = \tau_0$  的点是梯子在  $\tau_0$  时刻的瞬心几何点在固定坐标系中的投影. 从式 (14) 中可以看到, 圆弧在固定坐标系中的位置不随时间  $t$  而变化, 这表明定瞬心轨迹在固定参考系中静止.

(2)  $\underline{\tilde{\mathbf{R}}}_b(t, \tau)$  是与梯子相固连的以梯子为直径的半圆, 半圆上坐标  $(t, \tau) = (t_0, \tau_0)$  的点是  $\tau$  时刻的瞬心固连点在  $t$  时刻向固定坐标系的投影.

当取定  $t = t_0$  时, 该式描述了动瞬心轨迹在  $t_0$  时刻向固定坐标系的投影. 结合上面的结果可知, 梯子的动瞬心轨迹是与梯子相固连的半圆.

当取定  $\tau = \tau_0$  时, 由式 (15) 可得

$$\underline{\tilde{\mathbf{R}}}_b(t, \tau_0) = \underline{\mathbf{R}}_O(t) + \mathbf{A}(t)\underline{\tilde{\rho}}_b(t, \tau_0) =$$

$$2l \cos \omega(t - \tau_0)(\cos \omega \tau_0, \sin \omega \tau_0)^T \quad (16)$$

该式描述了  $\tau_0$  时刻的瞬心固连点在固定坐标系中投影的运动. 式 (16) 与式 (13) 无论在形式还是在物理意义上都别无二致. 由上式可知, 该固连点始终位于  $(\cos\omega\tau_0, \sin\omega\tau_0)^T$  这一方向, 并在  $t = \tau_0$  这一时刻运动至半径为  $2l$  的圆周 (即定瞬心轨迹) 上. 这也表明该固连点就是  $\tau_0$  时刻的瞬心固连点.

容易验证结论 (2)、(3) 均适合本算例, 因此两类瞬心轨迹之间的相对运动为纯滚动, 这也符合我们的物理直观.

#### 4 一般运动刚体情形的讨论

最后简要讨论一下一般运动刚体 ( $\omega \neq 0$ ) 的瞬心分布及其运动规律. 由于此时  $\Omega(t)$  为奇数阶反称矩阵, 故  $|\Omega(t)| = 0$ ; 又  $\omega = \omega_x e_x + \omega_y e_y + \omega_z e_z \neq 0$ , 容易知道  $\text{rank}(\Omega(t)) = 2$ . 故  $\Omega(t)$  像空间的维数为 2, 此时式 (2) 作为关于位矢  $r$  的线性方程组可能无解.

在式 (2) 有解的情况下 (如刚体作定点运动的情形), 解空间的维数为 1. 也就是说, 此时刚体的瞬心构成了三维欧氏空间中的一条直线, 亦即刚体运动的瞬时转轴.

在刚体运动过程中, 这条瞬时转轴将形成一张直纹曲面, 此时的瞬心轨迹实际上意味着这张直纹

曲面, 瞬心轨迹的运动就是空间曲面的运动. 可以预见, 这时两类瞬心轨迹 (即两张直纹曲面) 之间的关系将只具有局部意义, 且将涉及古典微分几何中曲面论的内容, 此处权当启发而不予更多讨论.

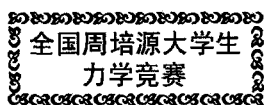
#### 5 小结

本文采用笛卡尔坐标系下的列阵 - 矩阵语言给出了平面运动刚体的动瞬心轨迹与定瞬心轨迹的运动方程, 并根据运动方程阐释了两类瞬心轨迹的几何特征与物理意义, 进而证明了结论: 平面运动刚体在任一时刻的动瞬心轨迹在定瞬心轨迹上作纯滚动, 接触点即为动瞬心轨迹在该时刻的瞬心固连点. 然后通过一个具体算例展示了瞬心几何点坐标及瞬心轨迹运动方程的求解方法, 并讨论了运动方程的物理意义. 最后还简要讨论了一般运动刚体的情形.

#### 参 考 文 献

- 1 李俊峰, 张雄. 理论力学 (第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2010
- 2 赵建康. 刚体平面运动时瞬心两种轨迹间关系的一种证明. 大学物理, 1998, 17(2): 16-19
- 3 康威. 单复变函数. 吕以攀, 张南岳译. 上海: 上海科学技术出版社, 1985

(责任编辑: 胡 漫)



## 关于力学竞赛的琐忆

王振东

(天津大学力学系, 天津 300072)

**摘要** 周培源先生是 1946 年建立的国际理论与应用力学联合会的首届理事, 1951 年当选为中国物理学会理事长, 1952 年在北京大学创办了中国第一个力学专业, 1957 年当选为中国力学学会副理事长. 文章回忆了时隔 35 年为周培源先生举办两次学术报告会的经过, 介绍了建议将中国力学学会 1988 年开办的“青年力学竞赛”, 以周培源先生名字冠名为“全国周培源大学生力学竞赛”, 并成为我国高等教育最高层级的大学生科技竞赛活动的过程. 全国周培源大学生力学竞

赛现已成为中国力学教育的品牌活动之一.

**关键词** 周培源, 力学竞赛, 大学生, 力学学会

**中图分类号**: N2 **文献标识码**: A

**doi**: 10.6052/1000-0879-17-180

#### 1 周培源先生与力学学会的几件事

1946 年 9 月, 时任清华大学教授的周培源

本文于 2017-05-24 收到.

1) E-mail: wangye@tju.edu.cn

**引用格式**: 王振东. 关于力学竞赛的琐忆. 力学与实践, 2017, 39(3): 311-314

Wang Zhendong. The memories about mechanical competition. *Mechanics in Engineering*, 2017, 39(3): 311-314